

Beispiel 24.2.1 • • • $y'' - 4y' + 13y = xe^x$

Lösung: Homogene Lösung: Wir lösen die homogene Gleichung

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

mit dem Euler-Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$. Das charakteristische Polynom lautet

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0.$$

Die Lösungen sind $\lambda = 2 \pm 3i$. Daher ist $e^{(2+3i)x}, e^{(2-3i)x}$ das Fundamentalsystem der homogenen Differenzialgleichung. Die homogene Lösung lautet somit

$$y_{\text{homo}}(x) = Ae^{(2+3i)x} + Be^{(2-3i)x},$$

was man am besten mit Sinus und Cosinus schreibt

$$y_{\text{homo}}(x) = e^{2x}(\tilde{A} \sin(3x) + \tilde{B} \cos(3x)).$$

Partikuläre Lösung: Da der inhomogene Term xe^x ein Polynom vom Grad 1 mal e^x ist, machen wir den folgenden Ansatz für die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = e^x \cdot (ax + b).$$

Die Koeffizienten a, b finden wir durch Einsetzen und Koeffizientenvergleich. Da $y'_p(x) = e^x(ax + b) + ae^x$ und $y''_p(x) = e^x(ax + b) + 2ae^x = (ax + 2a + b)e^x$, haben wir

$$e^x(ax + 2a + b - 4ax - 4b - 4a + 13ax + 13b) = e^x(10ax - 2a + 10b) \stackrel{!}{=} xe^x.$$

Es folgt $10a = 1$ und $-2a + 10b = 0$. Somit ist $a = 1/10$ und $b = 1/50$. Ausserdem ist

$$y_p(x) = \left(\frac{x}{10} + \frac{1}{50} \right) e^x$$

die gesuchte partikuläre Lösung.

Zusammenfassend: Die gesamte Lösung ist die Summe der homogenen und der partikulären Lösung

$$y(x) = e^{2x}(\tilde{A} \sin(3x) + \tilde{B} \cos(3x)) + \left(\frac{x}{10} + \frac{1}{50} \right) e^x.$$