

# Lösung allgemeiner linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen

## Überblick

Diese Zusammenfassung beschreibt anhand eines Beispiels das Vorgehen zur Lösung jeder beliebigen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung (GDG) erster Ordnung (mit konstanten Koeffizienten).

Im Generellen ist eine lineare GDG erster Ordnung von der Form

$$a_n u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{u} + a_0 u = f(t)$$

## Vorgehen

Im Folgenden möchten wir konkret die GDG

$$u^{(5)} - 4u^{(4)} + 4u^{(3)} = e^t$$

lösen.

### Schritt 1: Homogene Lösung bestimmen

Die **homogene Lösung** der GDG ist die Lösung der GDG ohne die rechte Seite  $f(t)$ . Das bedeutet, dass wir die GDG

$$u^{(5)} - 4u^{(4)} + 4u^{(3)} = 0$$

lösen.

Dazu machen wir den Ansatz  $u(t) = e^{\lambda t}$  und setzen ihn in die GDG ein:

$$\lambda^5 e^{\lambda t} - 4\lambda^4 e^{\lambda t} + 4\lambda^3 e^{\lambda t} = 0$$

$e^{\lambda t}$  können wir ausklammern:

$$e^{\lambda t} (\lambda^5 - 4\lambda^4 + 4\lambda^3) = 0$$

Da  $e^{\lambda t}$  nie 0 wird, muss der Ausdruck in den Klammern 0 sein:

$$\lambda^5 - 4\lambda^4 + 4\lambda^3 = 0$$

Den Ausdruck auf der linken Seite nennt man das **charakteristische Polynom** der GDG.

Als nächstes gilt es, die Nullstellen des charakteristischen Polynoms zu bestimmen. In 2 Dimensionen erhält man die Nullstellen ganz einfach mit der Mitternachtsformel. Wir haben hier allerdings ein Polynom 5. Grades, für das es keine allgemeine Lösungsformel gibt. Wir bemerken jedoch, dass  $\lambda = 0$  eine 3-fache Nullstelle ist und können anschliessend auch den Rest des Polynoms faktorisieren:

$$\begin{aligned}\lambda^5 - 4\lambda^4 + 4\lambda^3 &= \lambda^3(\lambda^2 - 4\lambda + 4) \\ &= \lambda^3(\lambda - 2)^2\end{aligned}$$

Damit haben wir die Nullstellen gefunden:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0, & \text{Multiplizität } 3 \\ \lambda_2 &= 2, & \text{Multiplizität } 2\end{aligned}$$

Die GDG ist vom Grad 5. Also ist die Menge der Lösungen der homogenen GDG ein 5-dimensionaler Vektorraum.

Unser Ansatz liefert uns die 2 Lösungen

$$u_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{0t} = 1$$

$$u_2(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{2t}$$

3 weitere Lösungen erhalten wir durch Multiplikation der beiden Lösungen mit  $t^k$ . Jede Nullstelle des charakteristischen Polynoms mit Multiplizität  $m$  liefert  $m$  Lösungen:

$$u_3(t) = t^1 u_1(t) = t$$

$$u_4(t) = t^2 u_1(t) = t^2$$

$$u_5(t) = t^1 u_2(t) = t e^{2t}$$

$u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$  bilden eine Basis des Lösungsraums der homogenen GDG. Die allgemeine Lösung der homogenen GDG ist also

$$u_h(t) = (a_1 + b_1 t + c_1 t^2) + (a_2 + b_2 t) e^{2t}$$

### Schritt 2: Partikuläre Lösung bestimmen

Die **partikuläre Lösung** der GDG ist eine spezielle Lösung der GDG mit der rechten Seite  $f(t)$ . In unserem Fall ist  $f(t) = e^t$ . Es gibt keine allgemeine Methode, um eine partikuläre Lösung zu finden. In Prüfungs- oder Übungsaufgaben wird oft eine partikuläre Lösung schon in der Aufgabenstellung vorgegeben.

In unserem Fall können wir jedoch eine spezielle Lösung erraten. Die  $n$ -te Ableitung von  $e^t$  ist  $e^t$ . Wenn wir also  $u = e^t$  in die GDG einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} u^{(5)} - 4u^{(4)} + 4u^{(3)} &= e^t - 4e^t + 4e^t \\ &= e^t \end{aligned}$$

$u_p(t) = e^t$  ist also eine partikuläre Lösung der GDG.

### Schritt 3: Allgemeine Lösung bestimmen

Die allgemeine Lösung der GDG ist die Summe der homogenen und der partikulären Lösung:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_h(t) &+& u_p(t) \\ &= (a_1 + b_1 t + c_1 t^2) + (a_2 + b_2 t) e^{2t} &+& e^t \end{aligned}$$

### Schritt 4 (optional): Anfangswertproblem lösen

Oft möchte man nicht nur die allgemeine Lösung der GDG bestimmen, sondern die Entwicklung eines Systems beschreiben, dessen Anfangszustand bekannt ist.

Der Anfangszustand wird durch sogenannte **Anfangsbedingungen** definiert. Die GDG zusammen mit den Anfangsbedingungen nennt man dann ein **Anfangswertproblem**. Um den Anfangszustand eindeutig festzulegen, werden 5 Anfangsbedingungen benötigt, da die GDG 5. Ordnung ist (da wir 5 Konstanten in der homogenen Lösung haben).

Ein mögliches Anfangswertproblem könnte also lauten:

$$u^{(5)} - 4u^{(4)} + 4u^{(3)} = e^t,$$

$$\begin{aligned}
u(0) &= 0, \\
\dot{u}(0) &= 1, \\
\ddot{u}(0) &= 1, \\
u^{(3)}(0) &= 1, \\
u^{(4)}(0) &= 1
\end{aligned}$$

Um das Anfangswertproblem zu lösen, setzen wir einfach die allgemeine Lösung der GDG in die Anfangsbedingungen ein und bestimmen die Konstanten  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2$ :

$$\begin{aligned}
u(t) &= (a_1 + b_1 t + c_1 t^2) + (a_2 + b_2 t)e^{2t} + e^t \\
\Rightarrow u(0) &= a_1 + a_2 + 1 = 0 \\
\dot{u}(t) &= (b_1 + 2c_1 t) + (2a_2 + b_2 + 2b_2 t)e^{2t} + e^t \\
\Rightarrow \dot{u}(0) &= b_1 + 2a_2 + b_2 + 1 = 1 \\
\ddot{u}(t) &= 2c_1 + (4a_2 + 4b_2 + 2b_2 t)e^{2t} + e^t \\
\Rightarrow \ddot{u}(0) &= 2c_1 + 4a_2 + 4b_2 + 1 = 1 \\
u^{(3)}(t) &= (8a_2 + 10b_2 + 2b_2 t)e^{2t} + e^t \\
\Rightarrow u^{(3)}(0) &= 8a_2 + 10b_2 + 1 = 1 \\
u^{(4)}(t) &= (16a_2 + 22b_2 + 2b_2 t)e^{2t} + e^t \\
\Rightarrow u^{(4)}(0) &= 16a_2 + 22b_2 + 1 = 1
\end{aligned}$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem, das wir lösen können, um die Konstanten zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
a_1 &= -1 \\
b_1 &= 0 \\
c_1 &= 0 \\
a_2 &= 0 \\
b_2 &= 0
\end{aligned}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$u(t) = e^t - 1$$