Lineare Differentialgleichungen

Beispiele von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{u} + u &= 0 \\ \dot{u} &= u^2 \\ \ddot{u} + u &= \frac{1}{t}\end{aligned}$$

Man nennt eine Differentialgleichung vom **Grad n** , wenn die höchste Ableitung von u in der Differentialgleichung die Ordnung n hat. Die Differentialgleichung $\dot{u} + u = 0$ ist also vom Grad 1, die Differentialgleichung $\dot{u} = u^2$ ist vom Grad 1, die Differentialgleichung $\ddot{u} + u = \frac{1}{t}$ ist vom Grad 2.

Eine Differentialgleichung heisst **linear**, wenn sie von der Form

$$a_n u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{u} + a_0 u = f(t)$$

ist. Falls ausserdem $f(t) = 0$ ist, heisst die Differentialgleichung **homogen**, sonst **inhomogen**.

Die Differentialgleichung $\dot{u} + u = 0$ ist linear und homogen, die Differentialgleichung $\dot{u} = u^2$ ist nicht linear, die Differentialgleichung $\ddot{u} + u = \frac{1}{t}$ ist linear und inhomogen.

Lösung von homogenen, linearen Differentialgleichungen

Homogene, lineare Differentialgleichungen können mit Hilfe des Ansatzes $u(t) = e^{\lambda t}$ gelöst werden.

Zur Illustration lösen wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}\ddot{u} + \dot{u} - 2u &= 0 \\ u(0) &= 0 \\ \dot{u}(0) &= 3\end{aligned}$$

Als erstes berechnen wir die Ableitungen von $u(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \lambda e^{\lambda t} \\ \ddot{u} &= \lambda^2 e^{\lambda t}\end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \lambda e^{\lambda t} - 2e^{\lambda t} = 0$$

Nun können wir ausnutzen, dass $\forall t \in \mathbb{C} e^{\lambda t} \neq 0$ ist und erhalten so das **charakteristische Polynom**:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

Die Lösungen dieses Polynoms sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$. Unser Ansatz gibt uns also zwei Lösungen:

$$\begin{aligned}u_1(t) &= e^t \\ u_2(t) &= e^{-2t}\end{aligned}$$

Gemäss Superpositionsprinzip ist jede Linearkombination von $u_1(t)$ und $u_2(t)$ ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist also

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ergibt sich durch Einsetzen der Anfangsbedingungen:

$$u(0) = c_1 + c_2 = 0$$

$$\dot{u}(0) = c_1 - 2c_2 = 3$$

Löst man dieses lineare Gleichungssystem, so erhält man $c_1 = 1$ und $c_2 = -1$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist folglich

$$u(t) = e^t - e^{-2t}$$