Beispiel 24.1.2 $\bullet\circ\circ$ $y'' - 2y' - 8y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

Lösung: Wir machen einen Euler-Ansatz

$$y(x) = e^{\lambda x}.$$

Das Einsetzen des Euler-Ansatzes in die Differenzialgleichung liefert

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - 2\lambda e^{\lambda x} - 8e^{\lambda x} = 0.$$

Es ergibt sich also das folgende charakteristische Polynom

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0.$$

Wir haben somit die zwei Nullstellen $4, -2$. Beide Nullstellen sind reell und kommen je einmal vor (Vielfachheit 1). Somit ist

$$e^{4x}, \quad e^{-2x}$$

das Fundamentalsystem. Die allgemeine Lösung lautet somit

$$y(x) = Ae^{4x} + Be^{-2x},$$

wobei A, B, C Konstanten sind, welche aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden können. Die Anfangsbedingungen implizieren

$$y(1) = Ae^4 + Be^{-2} = 1, \quad y'(1) = 4Ae^4 - 2Be^{-2} = 0.$$

Es folgt $A = 1/3e^{-4}$ und $B = 2/3e^2$. Somit lautet die gesuchte Lösung

$$y(x) = \frac{1}{3}e^{4x-4} + \frac{2}{3}e^{2-2x}.$$

■

Beispiel 24.1.3 $\bullet\circ\circ$ $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Lösung: Wir machen einen Euler-Ansatz

$$y(x) = e^{\lambda x}.$$

Das Einsetzen des Euler-Ansatzes in die Differenzialgleichung liefert das folgende charakteristische Polynom

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0.$$

Das Polynom hat die Nullstellen $-2 \pm i$. Beide Nullstellen kommen je einmal vor (haben Vielfachheit 1). Somit ist

$$e^{(-2+i)x}, \quad e^{(-2-i)x}$$

das Fundamentalsystem. Die allgemeine Lösung lautet somit

$$y(x) = Ae^{(-2+i)x} + Be^{(-2-i)x},$$

wobei A, B, C Konstanten sind, welche aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden können. Falls komplexe Nullstellen vorkommen, ist es im Allgemeinen nicht elegant, die Lösung in der obigen Form zu lassen. Statt dessen benutzt man die Eulerschen Formeln

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

um den Term $Ae^{ix} + Be^{-ix}$ als $\tilde{A}\cos(x) + \tilde{B}\sin(x)$ zu schreiben. $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ sind neue Integrationskonstanten, welche später auch aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden können. Wie kommt man aber auf diese Form? Es gibt einen mathematischen Satz der besagt, dass die Lösung einer reellen Differenzialgleichung (d.h. einer Differenzialgleichung mit reellen Koeffizienten) immer reell ist. Deswegen gilt für die Lösung $y(x) = \overline{y(x)}$. Aus dieser Bedingung folgt

$$y(x) = e^{-2x}(Ae^{ix} + Be^{-ix}) \stackrel{!}{=} \overline{y(x)} = e^{-2x}(\overline{A}e^{-ix} + \overline{B}e^{ix}).$$

Daraus folgt $\overline{A} = B$ bzw. $\overline{B} = A$. Damit kann man die Lösung $y(x)$ wie folgt umschreiben

$$\begin{aligned}
y(x) &= e^{-2x}(Ae^{ix} + Be^{-ix}) \\
&= e^{-2x}(\mathrm{Re}(A)e^{ix} + i\mathrm{Im}(A)e^{ix} + \mathrm{Re}(A)e^{-ix} - i\mathrm{Im}(A)e^{-ix}) \\
&= e^{-2x}\left[\mathrm{Re}(A)\underbrace{(e^{ix} + e^{-ix})}_{=2\cos x} + i\mathrm{Im}(A)\underbrace{(e^{ix} - e^{-ix})}_{=2i\sin x}\right] \\
&= e^{-2x}\left[\underbrace{2\mathrm{Re}(A)}_{\tilde{A}}\cos x \underbrace{-2\mathrm{Im}(A)}_{\tilde{B}}\sin x\right] = e^{-2x}(\tilde{A}\sin(x) + \tilde{B}\cos(x)).
\end{aligned}$$

Für die allgemeine Lösung der obigen Differenzialgleichung ergibt sich somit mit diesen Umformungen

$$y(x) = e^{-2x}(\tilde{A}\cos(x) + \tilde{B}\sin(x)),$$

wobei $\tilde{A} = 2\mathrm{Re}(A)$ und $\tilde{B} = -2\mathrm{Im}(A)$. Die Konstanten $\tilde{A}$ bzw. $\tilde{B}$ können nun aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden

$$y(0) = \tilde{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{A} = 0.$$

Es folgt

$$y'(x) = -2e^{-2x}\tilde{B}\sin x + e^{-2x}\tilde{B}\cos x \quad \Rightarrow \quad y'(0) = \tilde{B} = 1.$$

Somit lautet die gesuchte Lösung

$$y(x) = e^{-2x}\sin x.$$

■